

Mekanikan Palautettavat tehtävät S22

Tehtävä 1:

a) Lasketaan keksien ympärysmitta käyttäen ympyrän piirin kaavaa:

$$P = 2\pi r = \pi d$$

$$d = 8,50 \text{ cm}$$

$$P = \pi \cdot 8,50 \text{ cm} \\ = \underline{26,70 \text{ cm}}$$

Lasketaan virherajat käyttäen differentiaalia

$$d = d_0 + \Delta d$$

$$\Delta d = 0,02 \text{ cm}$$

$$\Delta P \leq |P'(d)| \cdot \Delta d$$

$$P'(d) = \frac{d}{dd} \pi \\ = \pi$$

$$\Delta P \leq |\pi| \cdot 0,02 \text{ cm}$$

$$\Delta P \leq 0,0628 \text{ cm}$$

Kosta virherajat pyöristetään ylempään liian optimististen tulosten välttämiseksi, niin keksien ympärysmittan virheraja on $0,0628 \text{ cm} \approx \underline{0,07 \text{ cm}}$

$$P = 26,70 \text{ cm}$$

$$\Delta P = 0,07 \text{ cm}$$

b) Lierion tilavuuden kaava: $V = Ah = \pi r^2 h$

Johdetaan tässä vaiheessa jatkoa varten halkaisijan pohjautuva ympyrän pinta-ala kaava:

$$r = \frac{1}{2}d \quad || (\cdot)^2$$

$$r^2 = \frac{1}{4}d^2$$

Sijoitetaan $\frac{1}{4}d^2$ nyt lierion tilavuuden kaavaan

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

$$V = \frac{\pi \cdot (8,50 \text{ cm})^2 \cdot 0,050 \text{ cm}}{4}$$

$$= 2,837 \dots \text{ cm}^3$$

$$\approx 2,8 \text{ cm}^3$$

Virhearvojen muuttujia on nyt kaksi:

$$\Delta d = 0,02 \text{ cm}$$

$$\Delta h = 0,005 \text{ cm}$$

Ratkaistaan tilavuuden ΔV käyttämällä kahden muuttujan differentiaalia:

$$\Delta V(d, h) \leq \left| \frac{d}{dd} f(d_0, h_0) \right| \cdot \Delta d + \left| \frac{d}{dh} f(d_0, h_0) \right| \cdot \Delta h$$

$$\Delta V(d, h) \leq \left| \frac{d}{dd} \frac{\pi d^2 h}{4} \right| \cdot \Delta d + \left| \frac{d}{dh} \frac{\pi d^2 h}{4} \right| \cdot \Delta h$$

$$\leq \frac{2\pi d h}{4} \cdot \Delta d + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta h$$

$$\leq \frac{\pi d h}{2} \cdot \Delta d + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta h$$

$$\leq \frac{\pi \cdot 8,50 \text{ cm} \cdot 0,050 \text{ cm}}{2} \cdot 0,02 \text{ cm} + \frac{\pi \cdot (8,50 \text{ cm})^2}{4} \cdot 0,005 \text{ cm}$$

$$\leq 0,285 \text{ cm}^3$$

$$\approx 0,3 \text{ cm}^3$$

$$V = 2,8 \text{ cm}^3$$

$$\Delta V = 0,3 \text{ cm}^3$$

Tehtävä 2

a)

Aloitetaan suoraan integroimalla funktio

$$\int_0^1 (2x^2 - 1) dx$$

$$\int_0^1 2 \cdot \frac{1}{2+1} x^{2+1} - x dx$$

$$\int_0^1 \frac{2}{3} x^3 - x dx$$

Suoritetaan integraalin määritys:

$$\left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} - 1 \right) - \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} - 0 \right)$$

$$\frac{2}{3} - 1 - 0$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

b) Aloitetaan suoraan integroimalla funktio

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^\pi -\cos \theta d\theta$$

Integraalin määritys:

$$-\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$-(-1) - (-1)$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

Tehtävä 2

c) Kyseessä on yhdistetyn funktion integrointi:

$$\int_0^1 v e^{v^2} dv$$

Yhdistetyn funktion integroinnin määritelmä:

$$\int f(x) \cdot g'(f(x)) dx = g(f(x)) + C$$

$$g'(x) = e$$

$$f(x) = v^2$$

$$f'(x) = 2v$$

Muutetaan funktiota niin, että integroitavana olisi $f'(x) \cdot g'(f(x))$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 2v e^{v^2} dv$$

Näin tekemällä saamme oikeanlaisen funktion integroitavaksi ilman, että funktion arvo muuttuu.

integroidaan:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 2v e^{v^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 e^{v^2} dx$$

määritetään funktio:

$$\frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2}$$

$$\frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{e-1}{2}}}$$